Moyenne arithmético-géométrique

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : questions **1)** à **7)**.

— Piste rouge : tout le devoir.

La plupart des fonctions continues n'ont pas de primitive qu'on puisse exprimer comme un empilement de fonctions usuelles par addition, produit, quotient et composition. On s'intéresse à l'une d'entre elles dans ce problème, la fonction $t \longmapsto \sqrt{1-t^4}$. À défaut de primitive, comment calculer de bonnes approximations du réel $\omega = \int_0^1 \sqrt{1-t^4}\,\mathrm{d}t$?

On pose pour tous $a, b > 0$: $\quad I(a,b) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}$.

1) Soient I un intervalle, $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ et $u, v \in I$ pour lesquels $u < v$. Justifier soigneusement les limites :

$$\lim_{r\to u^+} \int_r^v f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to v^-} \int_u^s f(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2) **a)** Montrer que pour tout $s \in [0,1[$: $\quad \displaystyle\int_0^s \sqrt{1-t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{s}{3}\sqrt{1-s^4} + \frac{2}{3}\int_0^s \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$.

Et maintenant, une subtilité. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ n'étant ni définie en 1, ni même prolongeable par continuité en 1, il n'est pas possible en MPSI de donner un sens à l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$.

b) En déduire malgré tout, grâce au changement de variable $t = \cos x$, que $\omega = \dfrac{2}{3}\, I\big(\sqrt{2}, 1\big)$.

3) Montrer que pour tous $a, b > 0$ pour lesquels $b \leqslant a$: $\quad \dfrac{\pi}{2a} \leqslant I(a,b) \leqslant \dfrac{\pi}{2b}$.

4) Montrer que pour tous $a, b > 0$: $\quad I(a,b) = \displaystyle\lim_{s\to+\infty} \int_0^s \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\big(t^2+a^2\big)\big(t^2+b^2\big)}}$ $\quad$ grâce au changement de variable $t = b\tan x$.

5) Soient $a, b > 0$. On note φ la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{ab}{t}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Vérifier que pour tout $t > 0$: $\quad \varphi(t)^2 + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \dfrac{\big(t^2+a^2\big)\big(t^2+b^2\big)}{4t^2}$ $\quad$ et $\quad \varphi(t)^2 + ab = \dfrac{\big(t^2+ab\big)^2}{4t^2}$.

b) En déduire que pour tous $r, s > 0$ pour lesquels $r < s$:

$$\int_r^s \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\big(t^2+a^2\big)\big(t^2+b^2\big)}} = \frac{1}{2}\int_0^{-\varphi(r)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\Big(u^2+\big(\frac{a+b}{2}\big)^2\Big)\big(u^2+ab\big)}} + \frac{1}{2}\int_0^{\varphi(s)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\Big(u^2+\big(\frac{a+b}{2}\big)^2\Big)\big(u^2+ab\big)}}.$$

c) En déduire très soigneusement que $I\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = I(a,b)$.

6) Soient $a, b > 0$ pour lesquels $b \leqslant a$. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ $\quad$ et $\quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$. $\quad$ On **admet** que ces suites sont bien définies et strictement positives.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad v_n \leqslant u_n$.

b) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $M(a,b)$, appelée la *moyenne arithmético-géométrique de a et b*.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad I(u_n, v_n) = I(a,b)$.

d) En déduire que $I(a,b) = \dfrac{\pi}{2\,M(a,b)}$.

On pose finalement pour tout $x > 0$: $\mu(x) = M(x,1)$. D'après **2)b)** et **6)d)** : $\omega = \dfrac{\pi}{3\,\mu\big(\sqrt{2}\big)}$.

7) On conserve les notations de la question **6)**, mais dans le cas particulier où $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \dfrac{(u_n - v_n)^2}{8}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n - \mu\big(\sqrt{2}\big) \leqslant 8\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{8}\right)^{2^n}$.

Les approximations de $\mu\big(\sqrt{2}\big)$ obtenues sont d'une efficacité redoutable. Si on veut une valeur approchée de ce réel à 10^{-40} près, autrement dit si on veut connaître $\mu\big(\sqrt{2}\big)$ avec 40 décimales exactes après la virgule, il est suffisant de calculer u_5. Et si on pousse le calcul jusqu'à u_{10}, on obtient plus de 1300 décimales exactes ! À condition de savoir approximer π, on sait donc très bien approximer ω.

La fin du devoir requiert les notions de *limite à gauche* et *limite à droite* d'une fonction, définies ci-dessous. Le *théorème de la limite monotone* pour les fonctions est momentanément **ADMIS**, on le démontrera plus tard dans l'année.

Théorème (Limite à gauche, limite à droite) Soient $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a > 0$.

- **Définition :** On appelle *limite de f à gauche en a*, quand elle existe, la limite de la fonction restreinte $f\big|_{]0,a[}$ en a. Cette limite est notée $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

  On appelle de même *limite de f à droite en a*, quand elle existe, la limite de la fonction restreinte $f\big|_{]a,+\infty[}$. Cette limite est notée $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
- **Lien avec la continuité :** f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
- **Théorème de la limite monotone :** Si f est monotone, alors f possède une limite en 0 et une limite en $+\infty$, éventuellement infinies, ainsi qu'une limite à gauche et une limite à droite en a toutes les deux finies. En outre, dans le cas où f est croissante : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

8) **a)** Montrer que pour tous $a, b, \lambda > 0$:

$$M(b,a) = M(a,b), \qquad M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b), \qquad M\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = M(a,b) \qquad \text{et} \qquad M(a,b) \geqslant \sqrt{ab}.$$

b) En déduire que pour tout $x > 0$: $\mu\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\mu(x)}{x}$ et $\mu(x) = \dfrac{x+1}{2}\,\mu\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)$.

c) Montrer que μ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} \mu(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \mu(x)$.

e) Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\mu(x)}{x}$ est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$, puis en déduire que μ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.